

## 対数正規分布を仮定した植栽木の基準判断のための樹高尺度

壁谷大介<sup>1</sup>

1 森林総研

**要旨**：本研究では、樹高基準に対して使い易い高さの尺度を見つける事を目的とした。そのために、全国のスギ植栽試験の樹高データ (n=661) を基に、対数樹高値の平均 ( $\mu$ ) および  $\sigma^2$  を求め、一般化線形混合モデルによって植栽木集団の樹高分布を対数正規分布とした場合の分散 ( $\sigma^2$ ) に基づく「高さの尺度」の有効性を検討した。その結果、スギ苗の樹高の  $\sigma^2$  は  $\mu$  に強く依存せず、比較的安定していることが明らかとなった。このことは、一度の測定で得られる  $\sigma^2$  と平均樹高の予測モデルを用いることで、将来の樹高のばらつきを推定できることを意味している。そこで、平均樹高と  $\sigma^2$  から植栽木の樹高分布を推定するモデルを作成したところ、モデルの上限から 75% までの範囲に実データの 77%、上限から 95% の範囲に 93% が分布しており、実用に耐えられるモデルであることが明らかとなった。

キーワード：対数正規分布、樹高、高さの基準、コンテナ苗データベース、スギ

### Tree height gauge based on log-normal distribution for criterion judgment on forest management

Daisuke KABEYA<sup>1</sup>

1 Forestry and Forest Products Research Institute

**Abstract**: In this study, variance parameter  $\sigma^2$  in lognormal distribution was evaluated as a useful parameter to calculate an appropriate gauge for judgement on tree height criterion. Total 661 of  $\sigma^2$  and mean ( $\mu$ ) in height of *Cryptomeria japonica* saplings, in which lognormal distribution was assumed, were calculated from the data registered in containerised saplings database, and the effect of  $\mu$  on  $\sigma^2$  was tested using GLMM. It was revealed that  $\sigma^2$  of log-height was affected weakly by  $\mu$  and relatively stable during early growth stage. This result indicated that  $\sigma^2$  of log-height calculated from single measurement would be useful for estimation of future distribution of sapling height. In fact, a simple model to estimate the distribution of sapling height using mean height and  $\sigma^2$  of log-height was able to estimate the height range in practical level at any mean height stages; 75% range estimated from the model contained 77% of whole data, and 95% estimation range contained 93% of data.

**Key-word**: log-normal distribution, tree height, tree height criterion, database of containerised saplings, *Cryptomeria japonica*

#### I はじめに

林業の初期保育における様々な作業の意志決定においては、例えば、雑草木高を基準として、植栽木がそれを越えていけば下刈り完了とする等、しばしば「高さの基準」が用いられる。しかしながら、実際の判断に際し、基準に対する尺度として、何を利用するかも重要である。判断尺度として植栽苗木の平均樹高を用いた場合、尺度が基準高を越えたとしても、集団全体の半数は基準高に達していないことが予想される。また、樹高の分布に正規分布を仮定したうえで計算される樹高の分位値を判断尺度として用いることも可能だが、樹高の標準偏差（分散）は、平均値の増加と共に拡大するため（図-1）、正規分布に基づく分位値を利用する場合には、判断する時点での測定データが必要となり、将来における作業量の予

測等には使いにくい。樹高の分位値を尺度として用いた将来の基準判断を行うためには、平均樹高に依らずに樹高のばらつきを表すことの出来るパラメータを用いる必要がある。そこで本研究では、植栽木の樹高分布に対数正規分布を仮定した場合に得られるパラメータ  $\sigma^2$  について、平均樹高との関係性を評価した上で、 $\sigma^2$  に基づく樹高の分位値の基準判断尺度としての有用性について検討した。

#### II 材料と方法

##### 1. データ

本研究は、コンテナ苗データベース（1）に登録された情報のうち、植栽事例の多いスギのコンテナ苗・裸苗のデータを利用した。用いたデータの概要は表-1の通り

表-1. 調査データの概要

Table 1 Description of data

地点数	54 地点	
試験植栽数	143 植栽	(反復測定数: 1 ~ 7 回)
測定群数	661 回	(個体数: 20 ~ 279 本)
総測定数	33,588 測定 (反復測定含む)	

表-2. GLMM の結果。R の glmer の結果、および同モデルをベイズ推定した結果を示す。waic は、上段が傾き  $(\log(\mu), \mu)$  を含むモデル、下段が含まないモデルの結果

Table 2 Results of GLMM

傾き		推定値	ベイズ 95% 信用区間	waic
$\log(\mu)$	傾き	2.36	2.05 ~ 2.49	-2738
	固定効果			
	切片	-6.47	-6.65 ~ -5.59	-2564
	変量効果	植栽	0.25	- -
残差	-	0.31	- -	-
$\mu$	傾き	0.47	0.35 ~ 0.51	-2712
	固定効果			
	切片	-5.06	-5.21 ~ -4.45	-2565
	変量効果	植栽	0.25	- -
残差	-	0.32	- -	-

である。

本研究で用いた対数正規分布は、確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

の形で表される。式内の用パラメータ  $\mu$ ,  $\sigma^2$  は、それぞれ元の数値を対数変換した値の平均、分散である。対数正規分布を植物のサイズの分布として想定した研究例として、枝の長さの比率 (2) や、樹高 (3) の分布に当てはめたものがあげられる。

## 2. 解析方法

本研究では、まず測定群 (n=661) 毎に、対数変換した樹高の平均  $\mu$  および分散  $\sigma^2$  を計算した。その上で、 $\sigma^2$  に対する  $\mu$  の影響について、一般化線型混合モデル (GLMM) を用いて評価した。GLMM においては、説明変数として  $\mu$  あるいは  $\log(\mu)$  を固定効果とし、さらに反復測定の影響を考慮するため、植栽効果の項を変量効果として加えた。また誤差分布としてガンマ分布を仮定した。GLMM は R (4.10) の lmer4 パッケージ (glmer) を用いると共に、階層ベイズモデルとして JAGS (var 4.3) でも計算を行い、パラメータの区間推定、および waic を基準としたモデル選択を実施した。

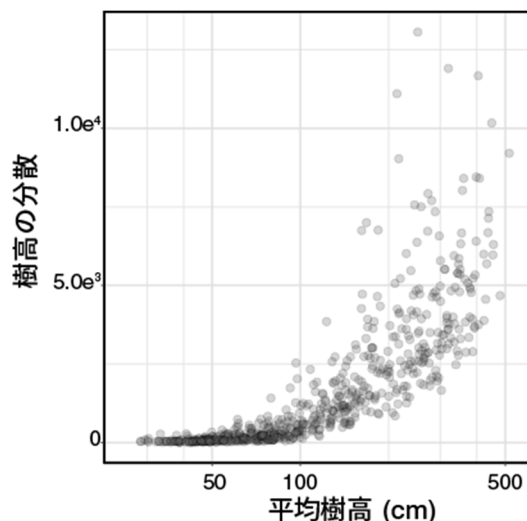


図-1. 植栽スギの樹高の平均と分散の関係。データは、コンテナ苗 DB に基づく。

Fig. 1 Relationship between mean and variance in *C. japonica* sapling height.

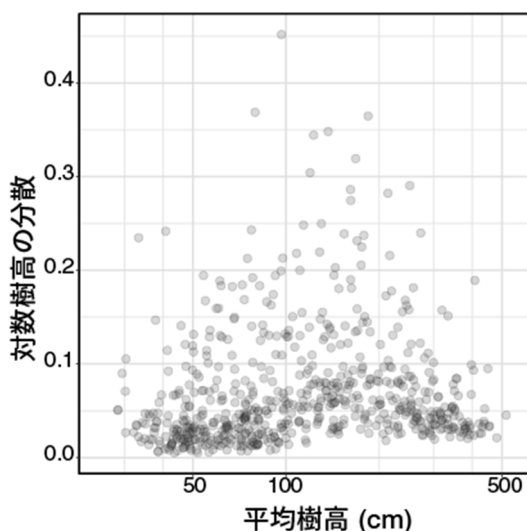


図-2. 植栽スギの樹高の平均と対数樹高の分散( $\sigma^2$ )の関係

Fig. 2 Relationship between mean of height and variance of log-height ( $\sigma^2$ ) in *C. japonica* sapling.

## III 結果と考察

### 1. $\sigma^2$ の分布と $\mu$ の影響

植栽群毎に推定された  $\sigma^2$  は  $5.10e^{-3} \sim 4.52e^{-1}$  の範囲で、下限から上限にかけてテールを引きながら減衰する分布を示しており、樹高平均値と  $\sigma^2$  との間には明確な関連性は見いだされなかった (図-2)。しかしながら GLMM の結果、固定効果  $\mu$  あるいは  $\log(\mu)$  は、いずれも正の値を取る項としてモデルに含まれ (表-2),  $\log(\mu)$

を用いた方がモデルのあてはまりが良いことが明らかとなった(表-2)。つまり、 $\mu$ の増加につれて、 $\sigma^2$ は大きくなることが明らかとなった。ただし  $\log(\mu)$ を含むモデルにおいては、育林初期の樹高範囲(0.3m ~ 5.0m)では、 $\sigma^2$ の範囲は 0.028 ~ 0.113 となり、含まないモデルにおける  $\sigma^2$ の95%ベイズ信用区間 0.066 ~ 0.083よりは広いものの大きく逸脱しないことから、以後の解析においては  $\sigma^2$ の分布の説明変数として  $\log(\mu)$ を含むモデルと含まないモデルについて検討した。また変量効果としてモデルに組み込んだ植栽苗木の効果は、残差誤差の効果と大きく異ならなかった(表-2)。

2.  $\sigma^2$ に基づく高さの基準に対する尺度モデル

GLMMで推定された  $\sigma^2$  および  $\mu$  ( $\log(\mu)$ )を用いて、対数正規分布の累積分布関数から任意の平均樹高における樹高の分布が推定可能となる。特に  $\sigma^2$ が  $\mu$ に依存しなければ、一回の  $\sigma^2$ の推定で将来にわたる樹高の分布範囲を予測が可能となる。そこで任意に設定した基準樹高に対し、植栽木集団の75%および95%が基準高を超えるための平均樹高を推定する簡易モデルを作成した(図-3)。このモデルに従えば、例えば基準高を2.0mに設定するとき、植栽木集団の75%が基準高を超えると予測される平均樹高は、 $\mu$ 効果なしモデルで2.35m、 $\mu$ 効果ありモデルで2.42mであり、植栽木集団の95%が基準高を越えると予測される平均樹高は、それぞれ2.95m、3.17mとなる。

作成したモデルの妥当性を確認するため、各測定群の平均樹高から逆算される基準高に対して、基準を上回る測定数を調べた。その結果、平均樹高から逆算された75%基準高を越えていた測定総数は、 $\mu$ 効果なしモデルで全測定数(n=33,588)の77%、 $\mu$ 効果ありモデルで80%となり、95%基準高を越えていた測定総数は、 $\mu$ 効果なしモデルで全測定数の93%、 $\mu$ 効果ありモデルで94%となった。この結果から、対数正規分布の  $\sigma^2$  および  $\mu$  は、樹高のばらつきを推定するためのパラメータとして有効であるとともに、本研究で示した高さ基準の判定尺度モデルは、 $\mu$ 効果あり、 $\mu$ 効果なしのいずれのモデルにおいてもおおよそ合致することが示唆された。

さらに各測定群において、本モデルで設定した基準高を越えていた測定の数が理論値(各測定群の測定数の75%および95%)を下回るかどうか、Fisherの片側正確確率計算法を用いてテストしたところ、理論値を有意に下回る個体数が確認されたのは、 $\mu$ 効果ありのモデルにおいては、75%基準で661測定群中の4測定群、95%基準では32測定群に留まっていた。また  $\mu$ 効果なしのモ

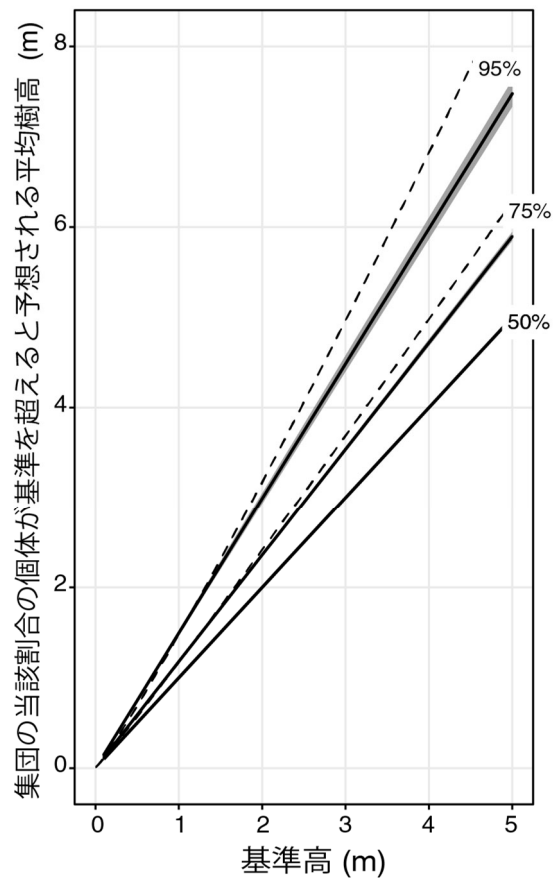


図-3. 設定した基準高を集団の75%および95%の個体が超えると予測される平均樹高を推定するモデル。図中の実線は、 $\sigma^2$ の推定に  $\log(\mu)$ を含まないモデルを用いたもの(灰色部分は95%ベイズ信用区間)。破線は  $\log(\mu)$ を含むモデルをもちいたもの。  
 Fig. 3 Models that estimate mean sapling height at which 75% or 95% of saplings would exceed certain criterion in height.

デルにおいては、75%基準で17測定群、95%基準で57測定群が有意に理論値を下回った。このことから、いずれのモデルにおいても、基準判定を明らかに失敗する割合は10%を下回っており、本研究で示した基準尺度モデルは実用的なレベルで活用可能であることが示された。

本研究で示した二つの判断尺度モデル( $\mu$ の効果を含むモデル・含まないモデル)は、図-3に示すように基準高が大きくなるほど基準クリア平均樹高(y軸)の差が大きくなるものの、実際の初期保育の現場において重要な基準高は、競合植生の一般的な高さ(一般草本で1.4 ~ 2.2m(4))、あるいはシカ食害の影響から解放される高さ(deer line: 1.5 ~ 2.0m(5))であることを考

慮すると、 $\mu$  の効果を含まないモデルでも十分運用可能であると思われる。この場合、

集団の 75% が基準超え： $H_{\text{mean}} = 1.173 \times H_{\text{std}}$

集団の 95% が基準超え： $H_{\text{mean}} = 1.475 \times H_{\text{std}}$

という式を利用することで、任意の樹高基準  $H_{\text{std}}$  に対し集団の 75% および 95% が基準をクリアするであろう平均樹高  $H_{\text{mean}}$  を推定できる。

さらに GLMM の結果で示されたように、 $\sigma^2$  のばらつきに対する植栽試験の影響は残差誤差と比べても小さい値であるので、スギの樹高における  $\sigma^2$  は、植栽地やコンテナ苗・裸苗といった苗木のタイプの影響によらず、比較的安定した値をとると考えられる。このため、実際に樹高のばらつきを推定するにあたっては、本研究で示した  $\sigma^2$  およびそれに基づく基準判断モデルを活用することが可能であろう。また、樹高が対数正規分布をとるということは、樹高の対数値が正規分布をとることと同義なので、Excel 等の表計算ソフトウェアを利用すれば、自前の測定データからでも  $\mu$  と  $\sigma^2$  の推定は簡単に行うことができる。さらに  $\sigma^2$  に対する  $\mu$  の影響を無視できるとすれば、正規分布の累積密度関数、あるいは正規分布の逆関数（例えば Excel の NORMINV 関数）で任意の平均対数樹高における累積分布範囲を  $\sigma^2$  から計算できる。なお、自前のデータで  $\sigma^2$  を計算する場合は、植栽直後の測定ではなく、植栽後ある程度経た後の測定データを用いた方が、安定した  $\sigma^2$  を得られる可能性がある（図-4）。

### 3. まとめ

本研究においては、高さの基準に対する判断の尺度を求めるうえで、現実的な利便性の高いパラメータとして、対数正規分布の  $\sigma^2$  を示した。 $\sigma^2$  は、平均樹高に対しても比較的安定しているため、樹高成長に伴う樹高分布の推定を可能にする。数学的な観点からすると、樹高の分布としてより適当な分布関数（ガンマ分布、超指数分布、ワイブル分布など）についても検討の必要があるだろうが、表計算ソフトウェアでも容易に計算できる  $\sigma^2$  は、実用性という観点で十分利用を検討する余地があるだろう。

**謝辞：**本研究は、生研支援センターの支援を受けて実施している地域戦略プロジェクト「優良苗の安定供給と下刈り省力化による一貫作業システム体系の開発」の一部として実施した。

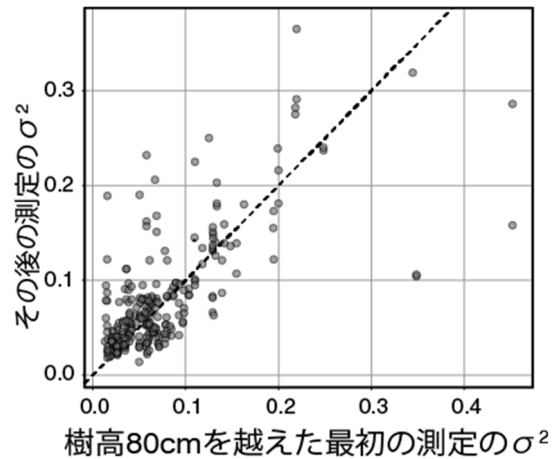


図-4. 樹高が 80 cm を越えた後の最初の樹高測定で得られた  $\sigma^2$  と、その後の測定で得られた  $\sigma^2$  の関係。図中の破線は  $y=x$  を表す。

Fig. 4 Relationship between  $\sigma^2$  estimated from the data collected when sapling height was over 80cm and  $\sigma^2$  s estimated the data from following measurement.

### 引用文献

- (1) 壁谷 大介・宇都木 玄・梶本 卓也 (2017) 日本国内におけるコンテナ苗植栽試験地に関するデータベース. 森林総合研究所研究報告 16: 147-153
- (2) Koyama K, Yamamoto K, Ushio M (2017) A lognormal distribution of the lengths of terminal twigs on self-similar branches of elm trees. Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences 284: 20162395
- (3) Rupšys P, Petrauskas E (2019) Evolution of the bivariate tree diameter and height distributions via the stand age: von Bertalanffy bivariate diffusion process approach. Journal of Forest Research 24: 16-26
- (4) 鶴崎 幸ほか (2020) 競合植生によって異なるスギ造林地の下刈り要否の判断基準. 日本森林学会誌 102: 225-231
- (5) 田崎 冬記ほか (2013) 知床岬台地草原におけるエゾシカ密度操作実験の植生応答および植生指標の検討. 日本緑化工学会誌 39: 503-511